

Правильні відповіді II туру Всеукраїнської олімпіади з математики Харківського національного університету будівництва та архітектури

Частина 1

1.1 Басейн наповнюється через першу трубу за 4 години, а через другу – за 6 годин. Яку частину басейну залишиться наповнити після спільної роботи обох труб протягом 2 годин?

А	Б	В	Г
$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{9}{10}$

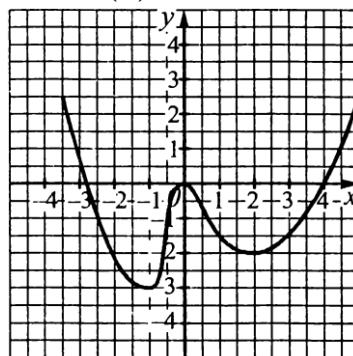
1.2 Внести множники під знак коренів: $a\sqrt{-a} + b\sqrt{b}$.

А	Б	В	Г
$\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}$	$\sqrt{-a^3} + \sqrt{b^3}$	$-\sqrt{-a^3} + \sqrt{b^3}$	$\sqrt{-a^3} + \sqrt{-b^3}$

1.3 Собівартість продукції спочатку зросла на 10%, а потім зменшилась на 10%. Як змінилась собівартість продукції?

А	Б	В	Г
Не змінилася	Збільшилася	Зменшилася	Визначити неможливо

1.4 На рисунку зображено графік функції $y = f'(x)$. Який з наведених графіків може бути графіком функції $y = f(x)$?



А	Б	В	Г

1.5 Розв'яжіть нерівність $|x-3| < 5$.

А	Б	В	Г
$(-2; +\infty)$	$(-\infty; 8)$	$(8; +\infty)$	$(-2; 8)$

1.6 Знайдіть площу квадрата, якщо радіус описаного навколо нього кола дорівнює 4 см.

А	Б	В	Г
32	16	6	8

1.7 Розв'яжіть нерівність $5^{x+2} + 5^x > 26$.

А	Б	В	Г
$(0; +\infty)$	$(1; +\infty)$	$(5; +\infty)$	$(26; +\infty)$

1.8 На рисунку зображено ромб, площа якого дорівнює 96 см^2 . У ромб вписано коло. Визначте площу зафарбованої фігури.



А	Б	В	Г
24 см^2	48 см^2	$24\sqrt{3} \text{ см}^2$	$16\sqrt{3} \text{ см}^2$

1.9 Знайдіть значення виразу $3\sin^2 \alpha - 7\cos^2 \alpha$, якщо $\cos \alpha = -0,1$.

А	Б	В	Г
2	3,1	2,9	3,96

1.10 Скільки чотиризначних чисел можна написати за допомогою цифр 0, 2, 5, 8?

А	Б	В	Г
4	24	192	18

1.11 Металеву кулю переплавлено на 8 рівних куль. Як змінилася при цьому загальна поверхня?

А	Б	В	Г
Збільшилася у 4 рази	Збільшилася удвічі	Зменшилася удвічі	Не змінилася

1.12 Обчислити інтеграл $\int_0^1 (x^2 + x)^2 dx$.

А	Б	В	Г
$1\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{13}{4}$

Частина 2

2.1 В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з основами 4 і 10 см і бічною стороною 5 см. Бічне ребро призми – 10 см. Знайдіть повну поверхню призми.

Розв'язання

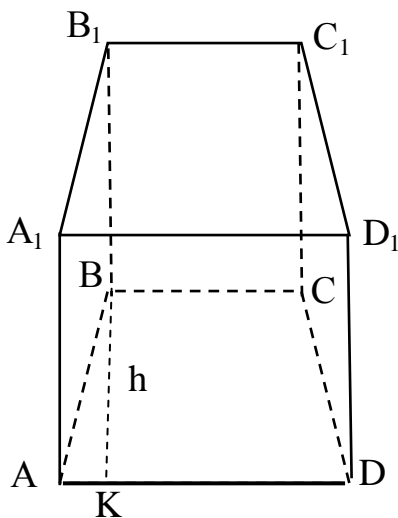
1. Повна поверхня призми обчислюється за формулою

$$S = P_{\text{осн}} \cdot H + 2S_{\text{осн}}.$$

2. На рисунку зображено пряму призму $ABCDD_1C_1B_1A_1$. Висотою призми є бічне ребро $H = AA_1 = 10$ см.

3. Периметр основи:

$$P_{\text{осн}} = 4 + 10 + 2 \cdot 5 = 24.$$



4. Площа основи: $S_{\text{осн}} = \frac{AD + BC}{2} \cdot h$.

$$AK = \frac{AD - BC}{2} = \frac{10 - 4}{2} = 3.$$

З $\triangle ABK$ за теоремою Піфагора маємо:

$$h = BK = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{10 + 4}{2} \cdot 4 = 28 (\text{см}^2).$$

5. $S = 24 \cdot 10 + 2 \cdot 28 = 296 (\text{см}^2)$.

Відповідь: 296 см^2

2.2 Знайдіть значення виразу $(\log_3 81^2 - 5^{\log_5 7}) \cdot 180^\circ + \frac{\pi}{\sqrt{3}} (\sin^4 75^\circ - \cos^4 75^\circ)$ та запишіть результат у градусах.

Розв'язання

$$\begin{aligned} & (\log_3 81^2 - 5^{\log_5 7}) \cdot 180^\circ + \frac{\pi}{\sqrt{3}} (\sin^4 75^\circ - \cos^4 75^\circ) = (2 \log_3 81 - 7) \cdot 180^\circ + \\ & + \frac{\pi}{\sqrt{3}} ((\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ) \cdot (\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ)) = (2 \log_3 3^4 - 7) \cdot 180^\circ - \end{aligned}$$

$$-\frac{\pi}{\sqrt{3}}((\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ) \cdot 1) = (2 \cdot 4 - 7) \cdot 180^\circ - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cos(2 \cdot 75^\circ) =$$

$$= 1 \cdot 180^\circ - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \cos 150^\circ = 180^\circ - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 180^\circ + \frac{\pi}{2} = 180^\circ + 90^\circ = 270^\circ$$

Відповідь: 270°

2.3 Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2 - 2x - 6}{x} - \frac{3x}{x^2 - 2x - 6} = 2$. Якщо розв'язків декілька, у відповідь запишіть найбільший корінь рівняння.

Розв'язання Введемо нову змінну $t = \frac{x^2 - 2x - 6}{x}$, тоді отримаємо рівняння:

$$t - \frac{3}{t} = 2;$$

Приведемо до спільного знаменника:

$$\frac{t^2 - 2t - 3}{t} = 0;$$

$$\begin{cases} t^2 - 2t - 3 = 0, \\ t \neq 0; \end{cases}$$

За теоремою Вієта знаходимо корені рівняння: $t_1 = -1, t_2 = 3$.

Врахувавши заміну, маємо:

$$1) \frac{x^2 - 2x - 6}{x} = -1;$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

Звідси $x_1 = -2, x_2 = 3$.

$$2) \frac{x^2 - 2x - 6}{x} = 3;$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 = 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

Звідси $x_3 = -1, x_4 = 6$.

Найбільший корінь рівняння $x = 6$.

Відповідь: 6

2.4 Знайдіть нескінченну суму

$$1 + \sin 45^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^3 45^\circ + \dots$$

Розв'язання Доданки нескінченної суми представляють собою нескінченно спадну геометричну прогресію, яка має вигляд: $1; \sin 45^\circ; \sin^2 45^\circ; \sin^3 45^\circ; \dots$

За означенням сума нескінченно спадної геометричної прогресії $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Знайдемо $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\sin 45^\circ}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тоді $S = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2}{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} = 2 + \sqrt{2}$.

Відповідь: $2 + \sqrt{2}$